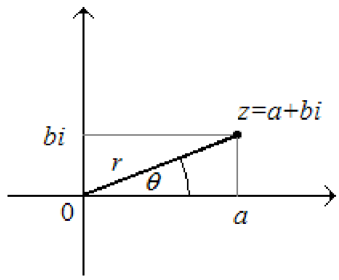
KOMPLEXA TAL

$z = a + bi$, där $a, b \in R$ **(rektangulär form)**

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ **(polär form)**

$z = re^{\theta i}$ **(potensform)**



Om $z = a + bi$ och $a, b \in R$ då gäller:
a kallas **realdelen** av z och betecknas $\operatorname{Re}(z)$
b kallas **imaginärdelen** av z och betecknas $\operatorname{Im}(z)$
$a - bi$ kallas **konjugatet** av z och betecknas $\bar{z}$
$\sqrt{a^2 + b^2}$ kallas **absolutbeloppet** av z och betecknas $|z|$

Räknelagar för absolutbelopp
$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ (w $\neq$ 0)

$|z^n| = |z|^n$

$|z + w| \leq |z| + |w|$ *(triangelolikheten).*

Radien r och vinkeln θ för komplexa tal i polär form och potensform:

Om $z = a + bi$ då gäller:
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Om $z \neq 0$ då gäller:
$a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$
En sådan vinkel kallas för **argument** av z och betecknas **arg(z)**.
Talet 0 tilldelas inget argument.
Argument av z är inte entydigt bestämd.
Om θ_1 är ett argument av talet z då är också
$\theta_1 + 2k\pi$,
talets argument för varje $k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Låt $z = a + bi$. Ett värde av arg (z) kan bestämmas enligt följande:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{om } a > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \text{om } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } a = 0, \quad b > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{om } a = 0, \quad b < 0 \\ \text{ej definierad} & \text{om } a = 0, \quad b = 0 \end{cases}$$

Om z och w är två komplexa tal då gäller:

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) \qquad (+2k\pi)$$

$$\arg(\frac{z}{w}) = \arg(z) - \arg(w) \qquad (+2k\pi)$$

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) \qquad (+2k\pi)$$

Uppgift 1.

a) Bestäm $\operatorname{Re} w$ om $w = \frac{1+i}{1-i} + i^{4000}$.

b) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$2z^{100} + 6 = 0$$

(z är ett komplext tal).

c) Rita i det komplexa tal planet mängden av alla komplexa tal z som satisfierar
$1 \le z \cdot \bar{z} \le 4$
($\bar{z}$ betecknar z- konjugat)

d) Bestäm samtliga (reella och komplexa) lösningar till ekvationen

$$x^2 - 2ix + 2 - 4i = 0\,.$$

e) (Komp upp3.1) Bestäm samtliga (reella och komplexa) lösningar till ekvationen

$$z^4 + 2iz^2 + 3 = 0\,.$$

Lösning:

a)

$$w=\frac{1+i}{1-i}+i^{4000}=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}+1=\frac{1+2i-1}{1-i^2}+1=\frac{2i}{2}+1=i+1=1+i.$$

$\mathrm{Re}(w)=1$

Svar a) $\mathrm{Re}(w)=1$

b)

$$2z^{100}+6=0\Rightarrow z^{100}=-3\Rightarrow z^{100}=3e^{\pi i}\Rightarrow$$

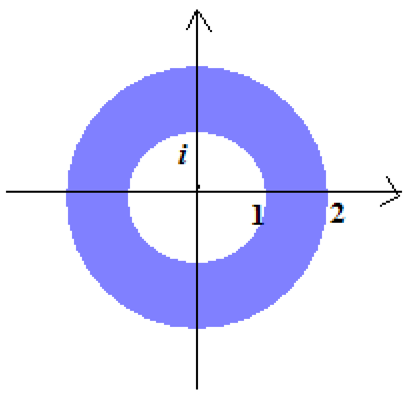
$$z^{100}=3^{\frac{1}{100}}e^{\frac{(\pi+2k\pi)i}{100}}\qquad k=0,1,2,\ldots,99$$

Svar b) $z^{100}=3^{\frac{1}{100}}e^{\frac{(\pi+2k\pi)i}{100}}\qquad k=0,1,2,\ldots,99$

c)

$1\le|z|^2\le 4\Rightarrow 1\le|z|\le 2$

Svar c)



Lösning d)

Kvadratkomplettering ger

$(x-i)^2+3-4i=0\Rightarrow(x-i)^2=-3+4i$.

Om vi betecknar $x-i=z$ då har vi

$z^2=-3+4i$.

Vi substituerar $z=a+bi$ och får

ekv1: $a^2-b^2=-3$

ekv2 $2ab=4$.

Eftersom $|z^2|=|-3+4i|$ får vi även

ekv3: $a^2+b^2=5$.

Från ekv1 och ekv2 har vi $a_1=1$ och $a_2=-1$

ekv2 ger då $b_1=2$ och $b_2=-2$.

Alltså $z_1=1+2i$, $z_2=-1-2i$

$x-i=z\Rightarrow x=i+z$.

Därför har vi två lösningar: $x_1=1+3i$, $x_2=-1-i$.

Lösning e)
Substitution
$z^2 = x \quad (*)$
ger
$x^2 + 2ix + 3 = 0$.

Kvadratkomplettering ger
$(x+i)^2 - i^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x+i)^2 = -4$
$\Rightarrow (x+i) = \pm\sqrt{-4}$
$\Rightarrow x + i = \pm 2i$.
$\Rightarrow x = -i \pm 2i$
$x_1 = i \quad och \quad x_2 = -3i$
A) $x_1 = i$
Från (*) har vi
$z^2 = i$.
Vi substituerar $z = a + bi$ och får
$a^2 - b^2 + 2abi = i$
och
ekv1: $a^2 - b^2 = 0$
ekv2 $2ab = 1$.
Eftersom $|z^2| = |i| = 1$ får vi även
ekv3: $a^2 + b^2 = 1$.
Från ekv1 och ekv3 har vi $2a^2 = 1$ $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $a_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$
ekv2 ger då $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $b_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.
Alltså $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.
B) $x_2 = -3i$. På liknande sätt som i ***A*** får vi
$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Svar e: $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Uppgift 2.

a) Bestäm $|w|$ om $w = \frac{4+3i}{4-3i}$.

b) I ekvationen

$$2u + i \cdot \bar{u} = 6$$

är u ett komplex tal och $\bar{u}$ talets konjugat. Lös ekvationen med avseende på *u*.

c) (1p) Ekvationen

$$|z - i| = |z - 1|$$

beskriver en rät linje i det komplexa tal planet.
Sätt $z = x + iy$ och skriv ekvationen på formen $y = kx + m$.

d) (*Jämför Kompletteringskompendium upp.* ***3.14***) Ekvationen
$z^4 - 3z^3 + 7z^2 - 15z + 10 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.

Lösning:

a)

$$|w| = \frac{|4+3i|}{|4-3i|} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{25}} = 1$$

b)

$$2(x + yi) + i \cdot (x - yi) = 6 \quad \Rightarrow$$

$$2x + y + i \cdot (x + 2y) = 6 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$x = 4, \quad y = -2 \quad \Rightarrow$$

$$u = 4 - 2i \quad .$$

c)

$$|z - i| = |z - 1| \quad \Rightarrow |x + iy - i| = |x + iy - 1| \quad \Rightarrow |x + i(y - 1)| = |x - 1 + iy|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \quad \text{(Vi kvadrerar båda leden i ekvationen)}$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \quad \Rightarrow$$

$$-2y = -2x \quad \Rightarrow$$

$$y = x.$$

Svar: a) $|w| = 1$ b) $u = 4 - 2i$ c) $y = x$

Lösning d:

Låt $z_1 = pi$, (p reellt tal) vara en rent imaginär lösning. Eftersom ekvationen har reella koefficienter är $z_2 = -pi$ också en lösning. Därför är polynomet

$$P(z) = z^4 - 3z^3 + 7z^2 - 15z + 10$$

delbart med $(z - z_1)(z - z_2) = (z - pi)(z + pi) = (z^2 + p^2)$

Vi betecknar $p^2 = a$ och $P_1(z) = z^2 + a$. För att beräkna kvoten $P(z)/P_1(z) = P_2(z)$ vi kan använda polynom division eller ansätta $P_2(z) = z^2 + bz + c$ och studera uttrycket

$P(z) = P_1(z)P_2(z)$

dvs

$z^4 - 3z^3 + 7z^2 - 15z + 10 = (z^2 + a)(z^2 + bz + c) \Rightarrow$

$z^4 - 3z^3 + 7z^2 - 15z + 10 = z^4 + bz^3 + (a + c)z^2 + abz + ac$

Jämför vi koefficienter får vi

$b = -3$, $a+c = 7$, $ab = -15$, $ac = 10$

och $a = 5$, $b = -3$, c=2.

Vi har att

$(z^2 + 5)(z^2 - 3z + 2) = 0 \Rightarrow$

$z_1 = i\sqrt{5}$, $z_2 = -i\sqrt{5}$, $z_3 = 1$, $z_3 = 2$

Svar: $z_1 = i\sqrt{5}$, $z_2 = -i\sqrt{5}$, $z_3 = 1$, $z_3 = 2$

Uppgift 3.

a) Bestäm det reella talet a så att $\dfrac{1+ai}{2-5i}$ blir reellt.

b) Bestäm absolutbeloppet av w då $w = i^{29} \cdot (e^{\frac{\pi}{4}i})^9 (3+3i)^8$.

c) Bestäm z ur ekvationen

$2z + 3\bar{z} = 10 - 4i$.

Lösning:

a)

$$\frac{1+ai}{2-5i} = \frac{1+ai}{2-5i} \cdot \frac{2+5i}{2+5i} = \frac{(2-5a)+(2a+5)i}{29}.$$

Om detta tal skall vara reellt måste imaginärdelen vara 0, vilket ger $2a + 5 = 0$ d v s $a = -5/2$.

b)

$$|w| = |i|^{29} \cdot |e^{\frac{\pi}{4}i}|^9 |3+3i|^8 = 1^{29} \cdot 1^{29} \cdot (3\sqrt{2})^8 = 3^8 \cdot 2^4 = 104976.$$

c)

Vi substituerar

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$

i ekvationen

$2z + 3\bar{z} = 10 - 4i$

och får

$2(a+bi)+3(a-bi)=10-4i$

$5a-bi=10-4i$

$\begin{cases}\text{Re}: 5a=10 \\ \text{Im}: -b=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4\end{cases}$

Svar: a) $a=-2.5$ **b)** $3^8 \cdot 2^4 = 104976$ **c)** $z=2+4i$

Uppgift 4.

a) Bestäm imaginärdelen av $z=\dfrac{1-i}{(1+i)^2}+4i^{89}$.

b) Bestäm absolutbeloppet av w då $w=\dfrac{(e^{\frac{\pi}{4}i})^8(2+2i)^2}{i^{10}}$.

c) Rita i det komplexa tal planet de punkter z som satisfierar
$1 \le |z| \le 4$ och $\dfrac{3\pi}{4} \le \arg(z) \le \pi$.

Lösning:

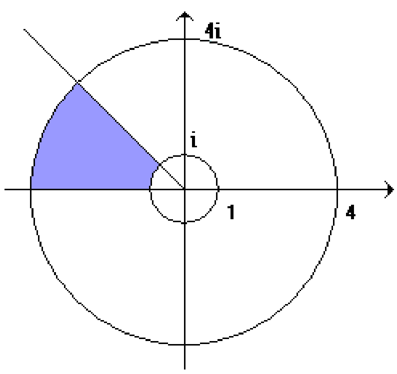
a) $z=\dfrac{1-i}{(1+i)^2}+4i^{89} = \dfrac{1-i}{1+2i-1}+4i = \dfrac{(1-i)i}{2i\cdot i}+4i = \dfrac{i+1}{-2}+4i = \dfrac{-1}{2}+\dfrac{7}{2}i$.

Svar a) Im(z)=$\dfrac{7}{2}$

b) $|w|=|\dfrac{(e^{\frac{\pi}{4}i})^8(2+2i)^2}{i^{10}}| = \dfrac{|e^{\frac{\pi}{4}i}|^8|2+2i|^2}{|i|^{10}} = \dfrac{1^8\cdot(\sqrt{8})^2}{|1|^{10}} = 8$.

Svar b) $|w|=8$

Svar c)



Uppgift 5.

a) Bestäm imaginärdelen av $z=\dfrac{1-2i}{1+2i}+3i^{37}$.

b) Bestäm argumentet av w då $w=\dfrac{(e^{\frac{\pi}{3}i})^6(1+i)^2}{i^9}$.

c) Ekvationen
$|z-1-i|=|z-3-3i|$
beskriver en rät linje i det komplexa talplanet. Sätt $z=x+iy$ och skriv ekvationen på formen $y=kx+m$.

Lösning:

a) $z=\dfrac{-3}{5}+\dfrac{11}{5}i \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}(z)=\dfrac{11}{5}$

Svar a) $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{11}{5}$

b) $\arg(w)=\dfrac{6\pi}{3}+2\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2} \quad (+2k\pi)$

Svar b) $\arg(w)=0 \quad (+2k\pi)$

c) Substitutionen $z=x+iy$ i ekvationen $|z-1-i|=|z-3-3i|$ ger
$|x+iy-1-i|=|x+iy-3-3i| \Rightarrow$

$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \Rightarrow$ (efter kvadrering)
$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Rightarrow$
$x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9 \Rightarrow$
$4y=-4x+16 \Rightarrow$
$y=-x+4$.

Svar c) $y=-x+4$

Uppgift 6.

a) Bestäm $\mathrm{Re}(w)$ om $w=(1+i)^{10}+i^{44}$.

b) I ekvationen

$$u+3i\cdot\overline{u}=8+2i$$

är u ett komplex tal.
Lös ekvationen med avseende på u.

c) Bestäm $|z_3|$ och $\arg(z_3)$ (som en reell funktion av parameter s)
då $z_3=\dfrac{4}{3+(s+2)i}$.

Lösning

a)

$$w=(1+i)^{10}+i^{44}=\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{10}+1=2^5e^{\frac{5\pi}{2}i}+1=32i+1\Rightarrow$$

$\mathrm{Re}(w)=1$

b)

$$(x+yi)+3i\cdot(x-yi)=8+2i \quad\Rightarrow$$

$$x+yi+3xi+3y=8+2i \quad\Rightarrow$$

$$(x+3y)+(3x+y)i=8+2i\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x+3y=8\\3x+y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+3y=8\\-9x-3y=-6\end{cases}\Rightarrow$$

$-8x=2\Rightarrow x=-1/4$

$y=2-3x\Rightarrow y=2+\frac{3}{4}\Rightarrow y=\frac{11}{4}$

$x=-1/4,\quad y=11/4 \quad\Rightarrow$

$u=\frac{-1}{4}+\frac{11}{4}i$.

c)

$$z_3=\frac{4}{3+(s+2)i}\Rightarrow|z_3|=\frac{|4|}{|3+(s+2)i|}=\frac{4}{\sqrt{9+(s+2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{s^2+4s+13}}$$

$$\arg(z_3)=\arg(4)-\arg(3+(2+s)i)=0-\arctan(\frac{2+s}{3})=-\arctan(\frac{2+s}{3}).$$

Svar: a) $\mathrm{Re}(w)=1$ **b)** $u=\frac{-1}{4}+\frac{11}{4}i$ **c)** $-\arctan(\frac{2+s}{3})$

Uppgift 7.

a) Skissera i det komplexa talplanet området som består av alla z som satisfierar

både $1\le|z|\le 4$ och $\frac{\pi}{4}\le\arg(z)\le\frac{3\pi}{4}$.

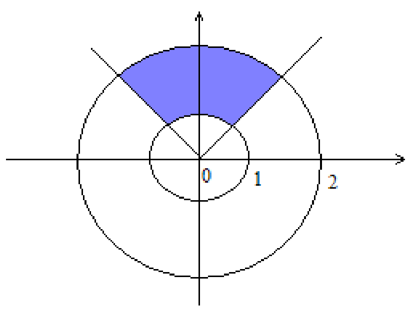
b) Bestäm $|z_3|$ och $\arg(z_3)$ (som en reell funktion av parameter s)

då $z_3=\frac{5}{2+(s+3)i}$, där s är ett reellt tal.

Lösning:

a)

Svar:



b) $z_3 = \frac{5}{2+(s+3)i} \Rightarrow |z_3| = \frac{|5|}{|2+(s+3)i|} = \frac{5}{\sqrt{4+(s+3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{s^2+6s+13}}$

$\arg(z_3) = \arg(5) - \arg(2+(3+s)i) =$

[eftersom $\text{Re}(2+(3+s)i)) = 2 > 0$]

$= (0 - \arctan(\frac{3+s}{2}) =$

$-\arctan(\frac{3+s}{2})$.

Svar: **b)** $-\arctan(\frac{3+s}{2})$

Uppgift 8. Det komplexa talet $z_1 = 2+i$ är en lösning till ekvationen .

$$2z^3 - 5z^2 - 2z + 15 = 0 \; .$$

Bestäm alla lösningar**.**

Lösning:

(Ekvationen har reella koefficienter och $z_1 = 2+i$ är en lösning) $\Rightarrow z_2 = 2-i$ är också en lösning till ekvationen och därför är ekvationen delbart med $(z-z_1)(z-z_2) = (z-2-i)(z-2+i) = (z-2)^2 - i^2 = z^2 - 4z + 5$**.**

Polynomdivisionen ger

$$(2z^3 - 5z^2 - 2z + 15)/(z^2 - 4z + 5) = (2z+3)$$

dvs

$$(2z^3 - 5z^2 - 2z + 15) = (z^2 - 4z + 5)(2z+3) \, .$$

Den tredje lösningen får vi ur

$$(2z+3) = 0 \Rightarrow z_3 = \frac{-3}{2} \, .$$

Svar: $z_1 = 2+i$**,** $z_2 = 2-i$ $z_3 = -3/2$

Uppgift 9.
Det komplexa talet $z_1 = 1+i$ är en lösning till ekvationen
$2z^3 - 5z^2 + 6z - 2 = 0$.
Bestäm alla lösningar**.**

Lösning:
(Ekvationen har reella koefficienter och en komplex lösning $z_1 = 1+i$) $\Rightarrow$ $z_2 = 1-i$ är också en lösning till ekvationen.
Därför är ekvationen delbart med
$(z-z_1)(z-z_2) = (z-1-i)(z-1+i) = (z-1)^2 + 1 = z^2 - 2z + 2$

$(2z^3 - 5z^2 + 6z - 2)/(z^2 - 2z + 2) = 2z - 1$.
Den tredje roten får vi ur
$2z - 1 = 0 \Rightarrow z_3 = \frac{1}{2}$.

Svar: $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = \frac{1}{2}$

Uppgift 10.
Bestäm alla (fyra) lösningar till ekvationen
$z^4 + 16 = 0$.
Svara på formen $a+bi$.

Lösning:

$z^4 + 16 = 0 \Rightarrow z^4 = -16$

$$z^4 = 16e^{\pi i}$$

$$z = 16^{\frac{1}{4}} e^{\frac{(\pi+2k\pi)i}{4}}, \qquad k = 0,1,2,3$$

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi i}{4}} = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2e^{\frac{3\pi i}{4}} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = 2(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2e^{\frac{5\pi i}{4}} = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = 2(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2e^{\frac{7\pi i}{4}} = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}\,.$$

Uppgift 11.
Betrakta ekvationen
$z^4 + 81 = 0$.

a) Lös ekvationen och ange alla lösningar(4 st) på formen $re^{i\varphi}$.
b) Ange alla lösningar på formen $a + bi$.
c) Pricka in lösningarna i det komplexa talplanet.

Lösning:

a)
$z^4 + 81 = 0 \;\Rightarrow\; z^4 = -81 \;\Rightarrow$

$$z^4 = 81e^{i\pi} \;\Rightarrow z_k = 3e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}}, \qquad k = 0,1,2,3$$

Svar a) $z_k = 3e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}}, \qquad k = 0,1,2,3$

b)

$$z_0 = 3e^{\frac{i\pi}{4}} = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

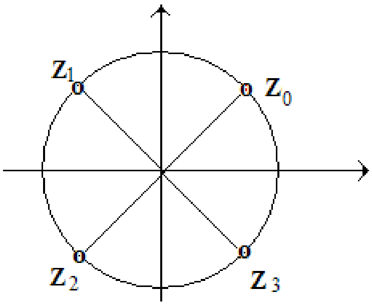
$$z_1 = 3e^{\frac{3i\pi}{4}} = 3(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{-3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = 3e^{\frac{5i\pi}{4}} = 3(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = \frac{-3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$z_3 = 3e^{\frac{i\pi}{74}} = 3(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

Svar b) $\pm\frac{3}{\sqrt{2}} \pm i\frac{3}{\sqrt{2}}$

Svar c)



Uppgift 12.

a) (1p) Bestäm $|w|$ om $w=\dfrac{2+i}{1-2i}$.

b) (1p) Bestäm alla lösningar med avseende på z till ekvationen

$$z^{300}=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} ,$$

där z är ett komplex tal.

c) (1p) Lös följande ekvation med avseende på z (där $z=x+yi$ är ett komplext tal)

$$2z+\bar{z}=3+2i .$$

d) (1p) Skissera i det komplexa talplanet området som består av alla z som satisfierar

$$1\le |z-(4+4i)|\le 3.$$

Lösning:

a) $|w|=\dfrac{|2+i|}{|1-2i|}=\dfrac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+4}}=1$.

Svar a: $|w|=1$

b) $z^{300}=1e^{\frac{\pi}{3}i}\Rightarrow z=e^{\frac{(\frac{\pi}{3}+2k\pi)i}{300}}$ $k=0,1,2,\ldots,299$

Svar b: $z=e^{\frac{(\frac{\pi}{3}+2k\pi)i}{300}}$ $k=0,1,2,\ldots,299$

c) Vi substituerar $z=x+yi$ i ekvationen

$$2z+\bar{z}=3+2i$$

och får

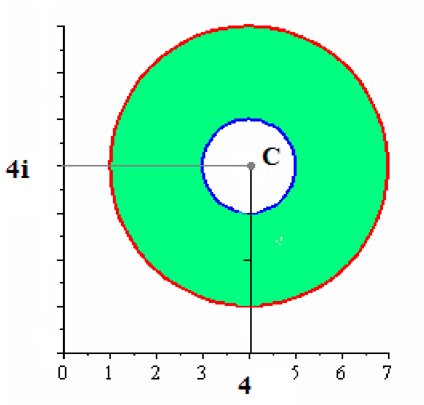
$$2(x+yi)+(x-yi)=3+2i\Rightarrow$$

$$3x+yi=3+2i\Rightarrow$$

$$x=1,\quad y=2$$

Svar c: $z = 1 + 2i$

d) **Svar d:**



Uppgift 13.
$z_1 = i$ är en lösning till ekvationen

$$z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0 .$$

Bestäm alla lösningar.

Lösning:
(Ekvationen har reella koefficienter och $z_1 = i$ är en lösning) $\Rightarrow z_2 = -i$ är också en lösning till ekvationen och därför är ekvationen delbart med
$(z - z_1)(z - z_2) = (z - i)(z + i) = z^2 - i^2 = z^2 + 1$.
Polynomdivisionen ger

$$(z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 3z + 2)/(z^2 + 1) = z^2 + 3z + 2$$

Två lösningar till får vi ur

$$z^2 + 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_3 = -1, \quad z_4 = -2$$

Svar: $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -2$