FORMELBLAD (Linjär Algebra)

Kurser: HF1008, Hf1006. TEN1 (Linjär Algebra) Program: Data-, elektro-, medicinsk teknik

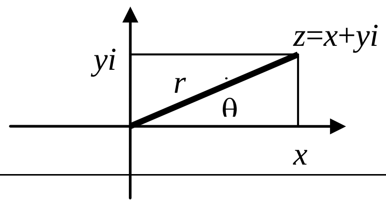
TRIGONOMETRISKA FORMLER

1.	$\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	16.	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \quad = 1$
2.	$\sin 45° = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	17.	$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
3.	$\sin 60° = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	18.	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
4.	$\cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	19.	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
5.	$\cos 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	20.	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
6.	$\cos 60° = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	21.	$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
7.	$\tan 30° = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	22.	$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$
8.	$\tan 45° = \tan\frac{\pi}{4} = 1$	23.	$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$
9.	$\tan 60° = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	24.	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$
10.	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	25.	$\cos 2\theta \;=\; \cos^2\theta - \sin^2\theta \;=$ $1-2\sin^2\theta \;=\; 2\cos^2\theta - 1$
11.	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	26.	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$
12.	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	27.	$\cos\theta = x \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \pm\arccos x + n\cdot 2\pi$
13.	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$	28.	$\sin\theta = x \quad\Leftrightarrow\quad \theta_1 = \arcsin x + n\cdot 2\pi\,; \quad \theta_2 = \pi - \arcsin x + n\cdot 2\pi$
14.	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$	29.	$\tan\theta = x \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \arctan x + n\cdot\pi$
15.	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$	30	$\cot\theta = x \quad\Leftrightarrow\quad \theta = arc\cot x + n\cdot\pi$

KOMPLEXA TAL

Låt $z = x + yi$ vara ett komplext tal .

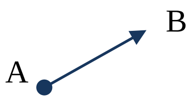
$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$



31.	Absolutbelopp: $\lvert z\rvert = r = \sqrt{x^2+y^2}$	39.	$\arg(z) = \theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{då } x>0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & \text{då } x<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{då } x=0,\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{då } x=0,\ y<0 \\ \text{ej definierat då både } x=0 \text{ och } y=0 \end{cases}$
32.	$\lvert z_1\cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert$		
33.	$\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$		
34.	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$		
35.	$\lvert z_1 \pm z_2\rvert \le \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$		
36.	$\arg(z_1\cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$		
37.	$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$		
38.	$\arg(z^n) = n\cdot\arg(z)$		

VEKTORER I ETT TREDIMENSIONELLT ORTONORMERAT SYSTEM

Låt $A = (a_1, a_2, a_3)$ och $B = (b_1, b_2, b_3)$
vara två punkter i rummet.
Då gäller $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\, b_2 - a_2,\, b_3 - a_3)$



Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer och θ vinkeln mellan dem. Vidare gäller att $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

(1.) Längden (beloppet) av en vektor: $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

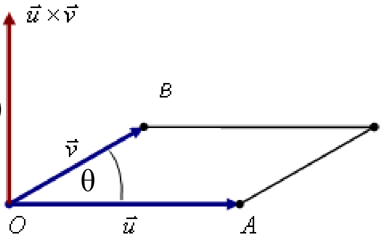
(2.) Skalärprodukt: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

(3.) Vektorprodukt (kryssprodukt): $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ $\{eller\ \ \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}\}$

(4.) Vektorprodukten är en vektor som är vinkelrät mot $\vec{u}$ och $\vec{v}$ och riktad enligt skruvregeln. Dess absolutbelopp är:
$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

(5.) Den **parallellogram** som bestäms (spänns upp) av vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ har arean

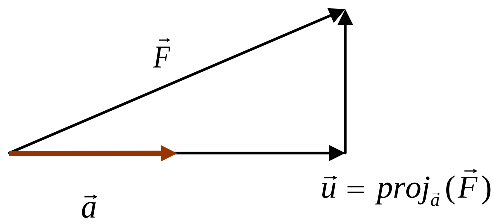
$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$



(6.)**Vektorprojektioner:**

$proj_{\vec{a}}(\vec{F}) = (\vec{F} \cdot \vec{a}_0)\vec{a}_0$

där $\vec{a}_0$ betecknar enhetsvektorn $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$



[Ekvivalent formel: $proj_{\vec{a}}(\vec{F}) = \left(\dfrac{\vec{F} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\right)\vec{a}$]

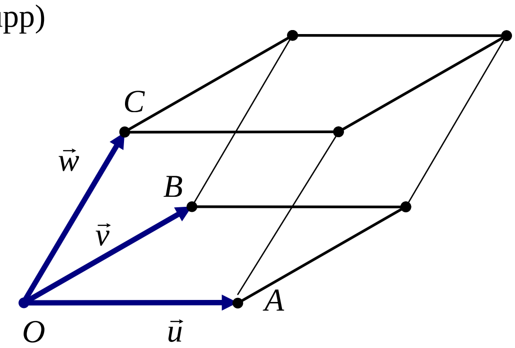
Vektorn $\vec{u} = proj_{\vec{a}}(\vec{F})$ är den ortogonala projektionen av $\vec{F}$ på $\vec{a}$.

Längden av $\vec{u}$ ges av $|\, proj_{\vec{a}}(\vec{F})\,| = \dfrac{|\vec{F} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|}$.

(7.) **Skalär trippelprodukt:** Låt $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ vara tre vektorer. Skalär trippelprodukt definieras som talet $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

(8.) Den **parallellepiped** som bestäms (spänns upp) av $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ har volymen

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}| = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right|.$$



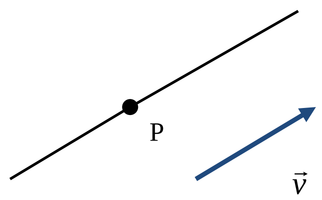
(9.) **Räta linjer:**

Låt L vara den räta linjen genom punkten $P = (x_1, y_1, z_1)$, som är parallell med vektorn $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \vec{0}$.

Räta linjens ekvation på parameter form kan skrivas på vektorform:

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(v_1, v_2, v_3)$

eller som tre skalära ekvationer: $\begin{cases} x = x_1 + t \cdot v_1 \\ y = y_1 + t \cdot v_2 \\ z = z_1 + t \cdot v_3 \end{cases}$



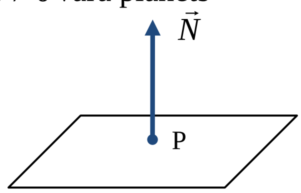
(10.) **Plan:**

Låt π vara planet genom punkten $P = (x_1, y_1, z_1)$. Låt $\vec{N} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ vara planets normalvektor.

Planets ekvation på allmän form:

Version 1: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

Version 2: $Ax + By + Cz + D = 0$



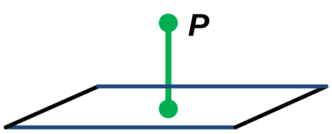
(11.) **Avståndet mellan två punkter**

Avståndet d mellan $A = (x_1, y_1, z_1)$ och $B = (x_2, y_2, z_2)$ är

$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

(12.) Avståndet d från **punkten** $P = (x_1, y_1, z_1)$ till **planet** $Ax + By + Cz + D = 0$ är

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$



(13.) Avståndet d från **punkten** $A = (x_1, y_1, z_1)$ till den **linje** som går genom P och har riktningsvektorn $\vec{v}$ är

$$d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{PA}|}{|\vec{v}|}.$$